

ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЙ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

Постановка задачи. Ввиду общности физических процессов течения с внезапным расширением рассматриваются на примере истечения струи из сопла Лавалья в соосный канал большого диаметра (рис.1). Зазор ($R_k - R_c$) между внутренней поверхностью канала и внешней поверхностью сопла может быть открытым (например, в эжекторе) или полностью закрытым (герметизированная донная область). Эти и другие подобные им виды течения объединяет одна проблема – донное давление.

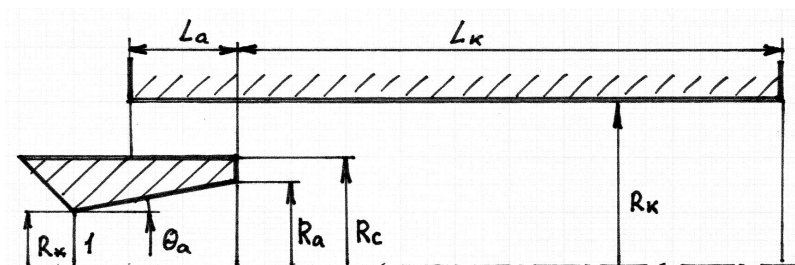


Рис. 1. Геометрия канала с внезапным расширением.

Основными геометрическими параметрами, от которых зависит характер течения, являются: радиусы выходного (R_a), критического (R_*), наружного (R_c) сечения сопла, угол (θ_a) полураствора сопла на его срезе, а также радиус канала (R_k). Часто также используются безразмерные величины: L_{mp} – безразмерная длина канала (в калибрах), F_{mp}/F^* – площадь канала, отнесенная к площади критического сечения сопла, M_a – геометрическое число Маха сопла. Положение сопла в канале определяют длина L_a выноса сопла в канал, влияющая на объем донной области, а также длина L_k канала. В частных случаях сопло и канал могут быть плоскими. При $R_k \rightarrow \infty$ реализуется истечение в затопленное пространство, в окрестности уступа, образуемого кромкой сопла ненулевой величины.

При заданной геометрии сопла и канала течение полностью определяется множествами газодинамических переменных F_0 параметров торможения рабочего газа, истекающего из сопла, и F_n – газа, заполняющего канал до истечения струи. Множества F составляют термодинамические и

теплофизические переменные f , определяющие состояние рабочего и окружающего газа: p – давление, T – температура, $\gamma=C_p/C_v$ – показатель адиабаты и др., которые влияют на донное давление (P_d) в окрестности выходного сечения сопла Лавалья. Отношение статических давлений рабочего газа и окружающей среды на внутренней кромке сопла ($n_a=P_a/P_d$) определяет локальную нерасчетность истечения сопла в отличие от величины $n=P_a/P_n$, которая обычно используется в качестве основного параметра, характеризующего истечение струи из сопла Лавалья. Следовательно, с одной стороны, донное давление определяет условия истечения струи из сопла Лавалья, а с другой – геометрия донной области существенно влияет на распределение в ней статических давлений, в том числе и у кромки выходного сечения сопла.

Процесс истечения сверхзвуковой струи в канал с внезапным расширением сопровождается широким спектром газодинамических явлений. Среди них наиболее интересными представляются нестационарные процессы, в том числе, автоколебательные режимы течения, которые реализуются в строго определенных диапазонах изменения определяющих это течение факторов. Изучение особенностей таких течений и умение создавать или избегать их позволяет использовать данную задачу для создания устройств глушения звука или наоборот – акустических генераторов.

Таким образом, сочетание широкого класса различных газодинамических процессов, с одной стороны, и больших возможностей практического использования этих явлений делает рассматриваемую задачу актуальной, как в фундаментальном, так и прикладных аспектах. Одним из известных приложений является камера Эйфеля аэродинамической трубы, в которой за счет эжекционных свойств струи образуется разрежение. Она позволяет имитировать условия полета ракеты в верхних слоях атмосферы в условиях пониженного давления.

В статье рассмотрены течения с внезапным расширением (ТВР) с открытой или герметизированной донной областью. К ним можно отнести (рис. 2):

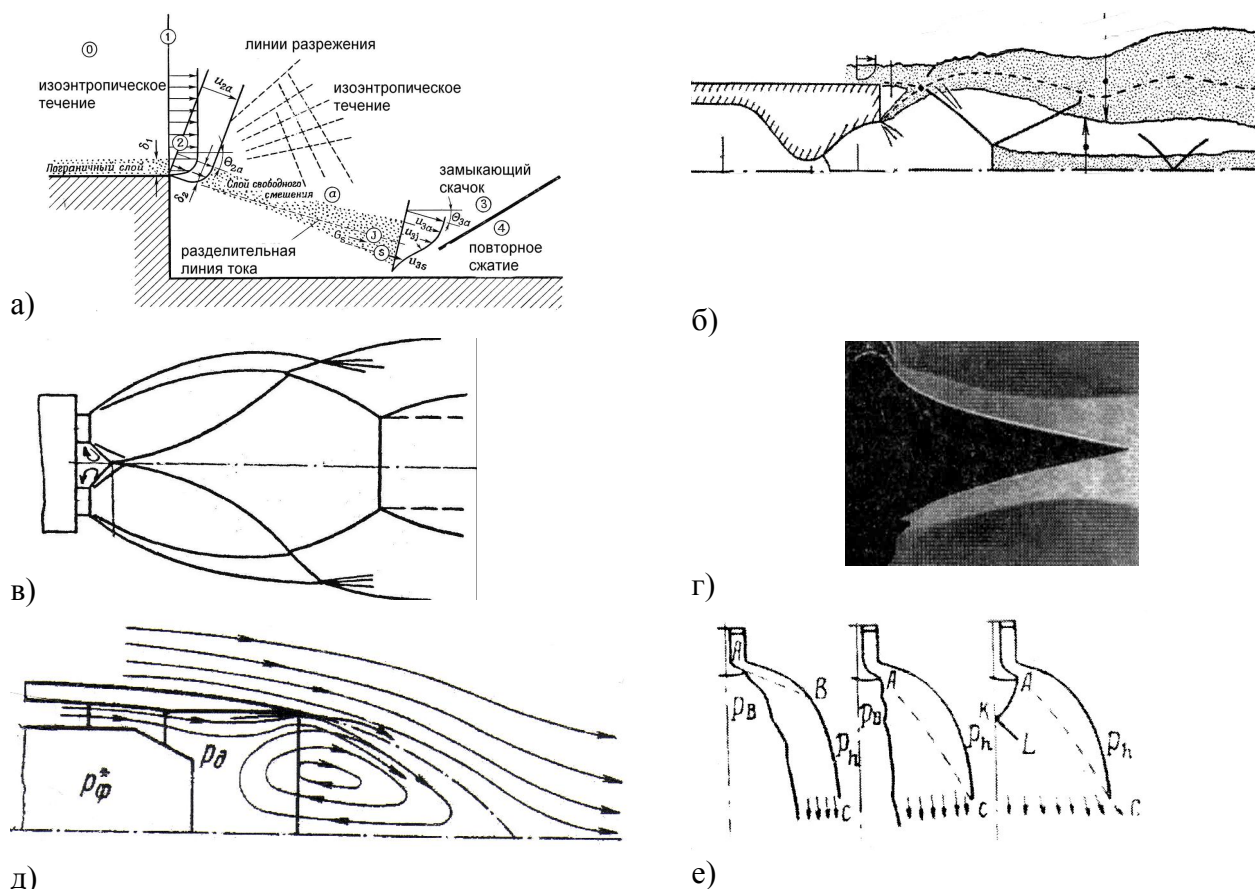


Рис.2. Примеры задач, связанных с определением донного давления.

1) Отрывное обтекание плоского (а) или осесимметричного обратного уступа, донных частей снарядов и ракет внешним потоком, как при наличии струи от двигателя (б), так и без нее;

2) истечение сверхзвуковых струй из сопловых блоков (в), кольцевых сопел (г), сопел с эжекторами (д), с разрывом контура и тарельчатых (е), которые обладают существенным саморегулированием в широком диапазоне нерасчетностей, чем определяется их преимущество перед соплом Лаваля;

3) Истечение струи в канал с нулевым (течения в диффузорах газодинамических лазеров, стенды имитации высотных условий) и ненулевым коэффициентом эжекции (эжектор, дульный тормоз, пусковой контейнер).

Существуют и другие технические приложения ТВР: внутренние отсеки вооружений летательных аппаратов, форсажные камеры и т.п. В настоящей работе из всего этого многообразия выбрана круглая сверхзвуковая струя, истекающая в осесимметричный канал. Она содержит в себе практически все элементы более сложных течений и может служить их моделью.

1. Основные понятия о донной области

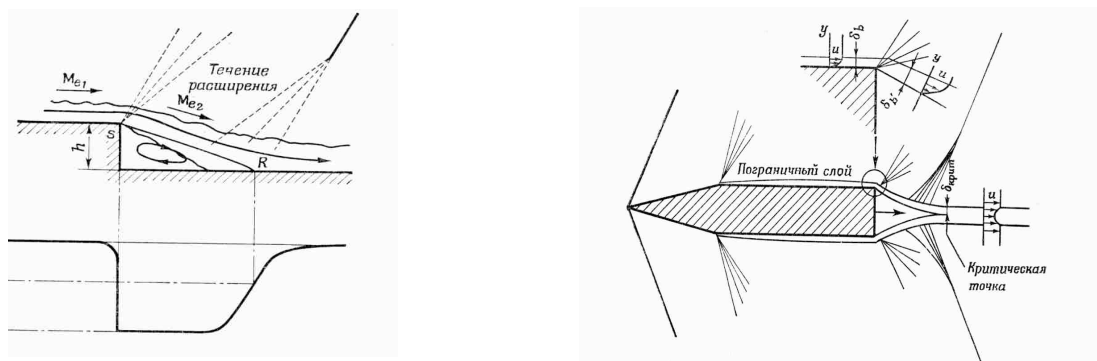
В *ТВР* можно выделить донную область, в которой из-за эжектирующего действия струи (или внешнего сверхзвукового течения) характерное давление ниже, чем в окружающей среде или основном (спутном) потоке. Вихревое течение в этой области существенно дозвуковое.

Донным давлением называется среднее давление P_d в донной области, оно определяет картину течения вниз по потоку. В фундаментальном труде А. Гогиша и Ю. Степанова [1] теоретически и экспериментально изучены вопросы влияния неравномерности течения в донной области на качественный характер *ТВР*. Показано, что модель изобарического течения в донной области вполне удовлетворяет потребностям практики.

Внутренними называются такие течения с внезапным расширением, в которых донная область образуется стенками канала, дном соплового блока и границей струи, истекающей из сопла, которая эжектирует газ, первоначально находящийся в канале. Возможен режим, когда вдоль стенок канала имеется возвратное течение газа окружающей среды в донную область. Если дно соплового блока имеет отверстия, то газ окружающей среды эжектируется через них в донную область. Важнейшим приложением внутренних течений с внезапным расширением является эжектор (Рис.2д). Первые работы по эжекторам были написаны через несколько лет после трудов Корста и Чепмена, посвященных проблемам донного давления [2]. Фундаментальной постановочной работой стала статья Чау и Эдди [3, 1964 г.], в которой рассмотрены основные режимы работы эжектора.

Внешнее течение с внезапным расширением реализуется при обтекании обратного уступа полубезграничным сверхзвуковым потоком. Обратный уступ – модель обтекания донной части летательных аппаратов (ЛА), донной стенки открытых отсеков вооружений. Побудительным моментом к началу исследований послужило то, что при переходе к сверхзвуковым скоростям полета вторым по важности фактором после волнового кризиса, влияющим на увеличение лобового сопротивления, является донное разрежение.

В плоском случае донная область образуется границей сверхзвукового потока, обтекающего ЛА, донным срезом и твердой плоскостью симметрии (рис.3а). При обтекании осесимметричных тел внешний поток отрывается от кромки донного среза и смыкается на оси (рис.3б).



а) Плоская задача

б) Осесимметричная задача

Рис. 3. Обтекание обратного уступа.

Течения, в котором донная область образуется свободными границами потока, возникают, например, в полете со сверхзвуковой скоростью ЛА с реактивным двигателем. Внешний поток взаимодействует с выхлопной струей. Принципиальная картина изображена на рис. 2б. Наличие кольцевой донной области, позволяет в равной степени считать такие течения как внутренними, так и внешними. Приоритет в их изучении принадлежит также Корсту.

Течение типа «закрытый след» (рис.4а) является разновидностью внешних *ТВР*. Если вдув в донную область со стороны днища отсутствует, либо

имеет небольшой расход, то внешнее течение полностью смыкается на оси симметрии, образуя закрытую донную область. Пограничный слой, оторвавшись от кромки донного среза, превращается в свободный слой смешения, который вновь смыкается в единый след на оси (присоединяется к стенке в плоском случае).

«Открытый след» (Рис. 4б) возникает, когда вдув уже не может компенсироваться уносом массы из донной области. Донная область имеет кольцевую форму. В следе за телом имеется «дырка», через которую вытекает газ из донной области. Отсюда и название режима.

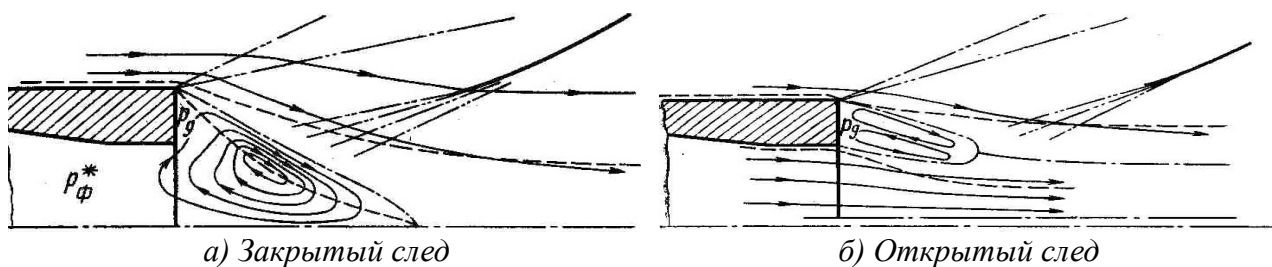
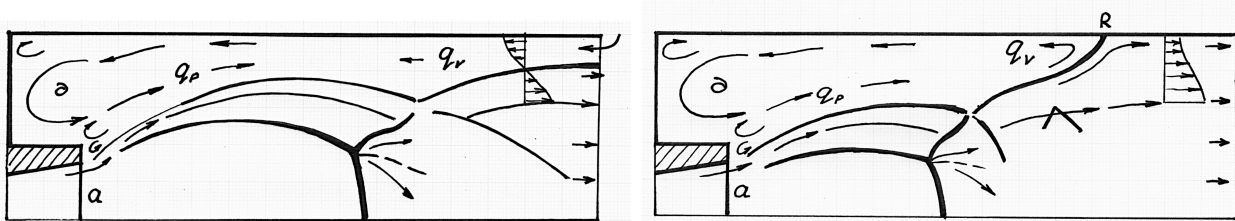


Рис.4. Течение типа «открытый след» и «закрытый след».

Открытая донная область (ОДО), в которую через кольцевой зазор между границей струи и стенкой канала поступает газ окружающей среды (рис. 5а) является аналогом открытого следа. При повышении полного давления габариты струи увеличиваются, зазор между ее границей и стенкой уменьшается. В результате эжекции давление в донной области уменьшается. Вдоль стенок канала устанавливается положительный градиент давления, который вызывает затекание газа окружающей среды в канал.

Закрытой (ЗДО) называется донная область, в которой отсутствует газ окружающей среды. При достаточно больших значениях полного давления в ресивере струя натекает на стенки канала (рис.5б). В результате взаимодействия турбулентного слоя смешения и элементов ударно-волновой структуры с твердой стенкой возникают разнообразные картины течения, объединяющим признаком для которых является донная область, в которой присутствует только газ, прошедший через сопло.



а) Открытая

б) Закрытая

Рис 5. Донная область в канале с внезапным расширением.

Когда в какой-то момент времени струя начинает натекать на стенки канала, в донной области присутствует газ, как окружающей среды, так и газ, вытекающий из сопла. Поскольку за счет смешения газ в донной области обновляется, то довольно быстро состав в ней становится однородным, состоящим только из газа, протекающего через сопло.

Разделительная линия (R на рис. 3а, 4а, 5б) отделяет основной поток (внешнее течение, в случае обтекания тела с донным срезом или струю, истекающую из сопла во внутренней задаче) от донной области, в которой циркулирует газ при примерно постоянном давлении. Если вдув в донную область отсутствует, то ее в течении всегда можно выделить. Понятие разделительной линии ввел Корст в работе [2], посвященной изучению обтекания обратного уступа сверхзвуковым потоком. Разделительная линия не является линией тока, это огибающая линий тока.

Дисбаланс расходов масс $\zeta = (q_p - q_v) / Q_a$, поступающих в донную область (q_v) из окружающей среды (на режимах ОДО) или из области присоединения струи к стенке канала (на режимах ЗДО) и эжектируемых из донной области струей (q_p), отнесенный к расходу рабочего газа через сопло Q_a , является критериальной величиной, характеризующей состояние газодинамической системы. Если при заданном P_0 дисбаланс равен нулю, то система находится в стационарном положении, в противном случае донное давление изменяется. Изучение поведения газодинамической системы в пространстве $\zeta - P_0$ аналогично исследованию ее динамических свойств на фазовой плоскости. В 1985 г. авторами было установлено, что при натекании струи на стенку канала газодинамическим или турбулентным участком функция дисбаланса $\zeta(P_0)$ при

$P_0 = const$ в пределах своей области определения (ООФ) может быть немонотонной и иметь 2 корня, один из которых устойчивый, а другой нет (рис. 6). Устойчивому корню соответствует экспериментальное значение донного давления (показано на рис.7 сплошной линией на нижней плоскости P_0 - P_∂). Если в ООФ $\zeta(P_\partial)$ не имеет корней, то при данном P_0 струя в канале не может находиться в стационарном положении.

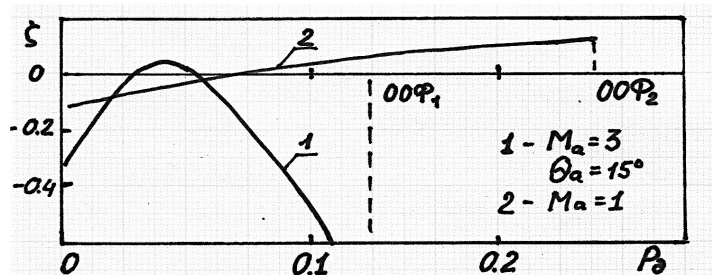


Рис. 6. Зависимость $\zeta(P_\partial)$ при фиксированном P_0 .

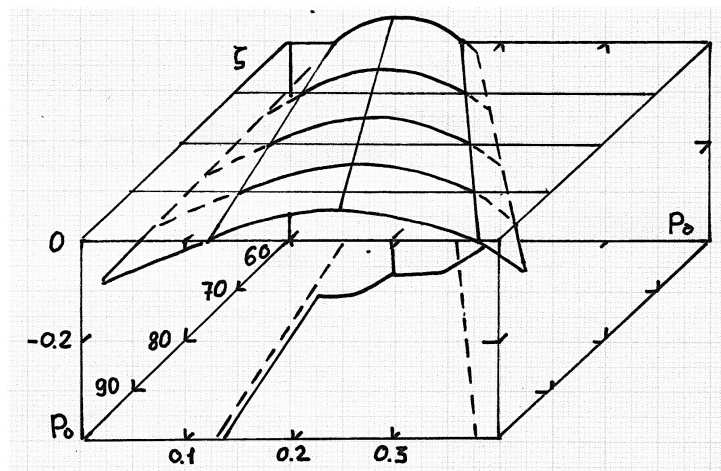


Рис.7. Зависимость дисбаланса от P_∂ и P_0 .

2. Экспериментальное изучение струи в канале

Первые экспериментальные работы по проблеме определения донного давления появились в середине 50-х годов. В работах Баланина Б.А. [4,5,6] исследовано влияние длины канала на P_∂ и условия запуска канала. В трудах Андерсона и Вильямса [7], Мартина и Бейкера [8], Юнговски [9] изучались фазы формирования потока в канале и был установлен типичный график $P_\partial(P_0)$ (Рис.8). Детально изучена зависимость относительного донного давления $P_\partial = P_\partial/P_n$ от геометрических параметров сопла, канала, и безразмерных параметров торможения рабочего газа в ресивере.

Как видно на рис.8. на графиках можно выделить три характерных участка, разделенных двумя точками, в которых происходит излом кривой, образующей зависимость $P_\partial(P_0)$. Нисходящие ветви графиков расслаиваются в зависимости от длины канала L_{mp} . Чем длиннее канал, тем ниже располагается график. Важное значение имеет соотношение размеров канала и первой бочки струи в момент касания струи стенок. Если канал не слишком короткий и L_{mp} больше половины длины первой бочки, то график будет таким, как показано на рис.8. Если длина трубы такова (L_v), что в момент касания среза канала турбулентным участком диаметр первой бочки струи близок к диаметру канала, то второй участок графиков отсутствует, а сами графики имеют характерный разрыв (кривая 1 на левом графике, кривая 3 на правом графике). Остальные кривые соответствуют каналам большей длины ($L_{mp} > L_v$).

3. Качественная картина течения

Трансформация ударно-волновой структуры при изменении P_0 показана на фотографиях (рис.9) и схемах (рис.10). С увеличением P_0 формируется поток рабочего газа с газодинамическими разрывами (ГДР), истекающий со среза сопла, и возвратное течение из окружающей среды в ОДО через кольцевой зазор между стенкой и границей струи (рис.9а, 10а). Проведенное в ЦАГИ [10, 1973] исследование распределения давления на стенке канала, показало, что статическое давление в кольцевом зазоре почти линейно изменяется от величины давления на срезе канала P_n до P_∂ . Картина течения качественно не изменяется до тех пор, пока возвратный поток по кольцевому зазору не станет трансзвуковым в сечении, соответствующем максимальному диаметру первой бочки струи. Происходит «запирание» донной области и она становится закрытой. Если канал достаточно длинный, то струя взаимодействует со стенкой турбулентным участком (рис. 9б, 10б). При определенном сочетании P_0 , P_n и длины канала струя не может находиться в стационарном положении ни при каких значениях P_∂ и устанавливается режим низкочастотных автоколебаний (НК). Струя при этом циклически изменяет свои

поперечные размеры. Автоколебаниям всегда предшествуют более или менее выраженные высокочастотные колебания небольшой амплитуды. При дальнейшем увеличении P_0 практически все поперечное сечение канала перекрывается мощным мостообразным скачком, течение за которым полностью дозвуковое (Рис.9в, 10в). При еще большем P_0 струя натекает на стенку канала в пределах первой бочки (рис. 9 г,д, 10 г,д), что приводит к образованию пристенного скачка, который пересекается с висячим скачком в точке «В». В результате возникают результирующий скачок (2) и отраженная волна. Противодавление на срезе канала приводит к образованию центрального скачка уплотнения (3), число Маха, за которым меньше 1. Этот скачок не следует путать с маховским диском в свободной сверхзвуковой затопленной струе. Отраженный скачок (4) вызывает отрыв пограничного слоя (5) на стенке канала. Обтекание отрывной зоны сверхзвуковым потоком приводит к образованию скачка (6).

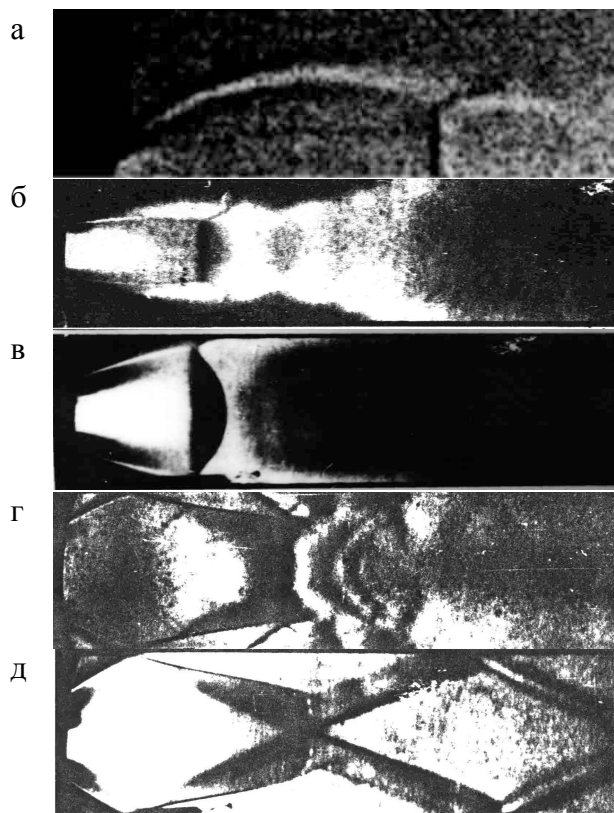


Рис.9. Теневые фотографии.

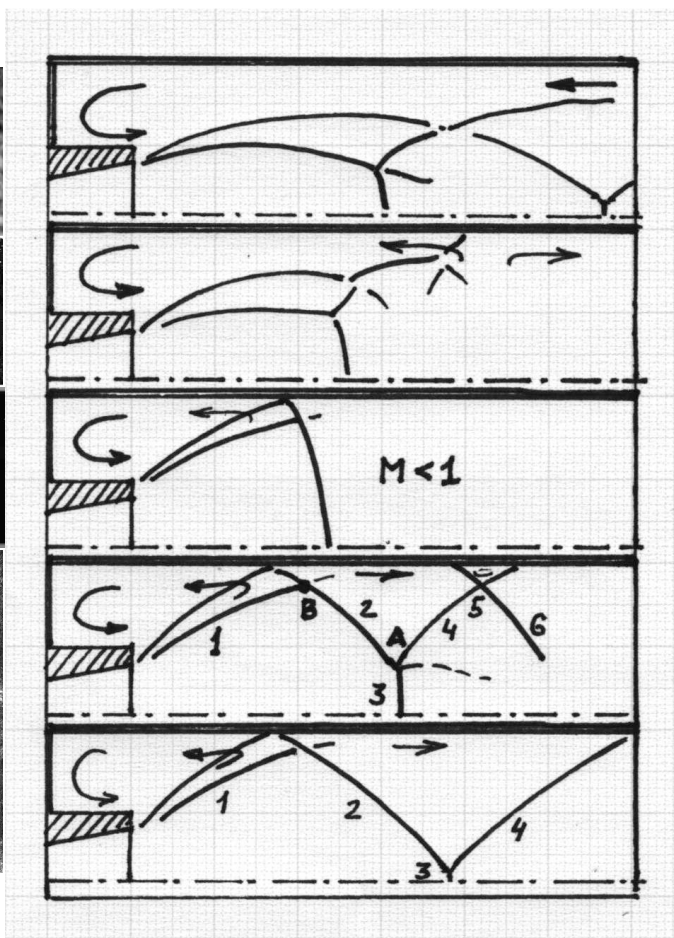


Рис.10. Схемы течения.

С ростом полного давления P_0 центральный скачок уплотнения (3) постепенно удаляется от сопла, его диаметр уменьшается и устанавливается независимая от P_0 УВС, которую называют X-образной или сетчатой.

4. Анализ характерных давлений

Типичный график зависимости P_δ от P_0 . С повышением P_0 происходит постепенное уменьшение P_δ от величины равной внешнему (атмосферному) давлению P_n до предельно низкой величины, определяемой конструктивными особенностями устройства, после чего P_δ снова начинает расти (Рис. 8). Таким образом, имеются две ветви графика: нисходящая, когда донное давление падает, и восходящая, когда донное давление растет. Восходящей ветви соответствует течение с ЗДО, нисходящей – ОДО и ЗДО.

Как показали многочисленные эксперименты, после достижения минимального значения донного давления при дальнейшем увеличении P_0 рост $P_\delta(P_0)$ происходит линейно, причем прямая линия проходит через начало координат, нерасчетность струи $n = P_{0л}(Ma)/P_\delta = const$. Картина течения не зависит от наружного давления. Говорят, что установился **автомодельный режим (AP)** течения.

Неавтомодельными (НАР) называются режимы, соответствующие нисходящей ветви графика. Донное давление зависит от длины канала и P_n . На нисходящей ветви графика в типичных случаях присутствуют нестационарные режимы (зоны неоднозначности графиков на рис.8), подробно рассмотренные ниже.

Характерные точки I, II, III, IV и соответствующие им давления $P_0^I, P_0^{II}, P_0^{III}, P_0^{IV}$ разделяют различные режимы течения. Точка P_0^I соответствует переходу от ОДО к ЗДО. Точки P_0^{II} и P_0^{III} отмечают начало и окончание низкочастотных автоколебаний. Поскольку график $P_\delta(P_0)$ состоит из нисходящей и восходящей ветвей, то всегда присутствует, точка P_0^{IV} ,

соответствующая минимальному донному давлению. Точки P_0^{II} и P_0^{III} могут отсутствовать.

Абсолютный экстремум минимального донного давления и оптимальная длина канала. P_δ на неавтомодельных режимах зависит от наружного давления и длины канала, а на прямолинейном участке графика - нет. В результате, нисходящая и восходящая ветви графика при различных длинах канала пересекаются в разных точках, и соответствующее минимальное донное давление разное. Для заданного сопла и диаметра трубы существует такая длина L_{mp} , которая обеспечивает наименьшее P_δ . Отысканием экстремума P_0^{IV}, P_a^{IV} занимался в 70-х годах Баланин Б.А. [5,6]. Он же впервые ввел понятие оптимальной длины канала, т.е. длины при которой обеспечивается абсолютный минимум P_δ . Если стоит задача проектирования камеры Эйфеля для имитации высотных условий, то ее длину следует выбирать равной оптимальной длине канала. Это обеспечивает максимальное разрежение при заданном расходе рабочего тела. По итогам обработки экспериментальных данных в БГТУ «Военмех» получена эмпирическая формула, определяющая оптимальную длину канала.

$$l_{\delta\delta}^{opt} = \frac{3.15}{2(0.7 + tg\vartheta_a)} M_a d_{\delta\delta}$$

Зависимость P_0^{IV}, n^{IV} от геометрии сопла и канала приведена на рис. 11-13. В результате обработки всех P_0^{IV}, P_a^{IV} при $L_{mp} = L_{opt}$ составлена таблица 1 и графики на рис.11,12. Сопло с $\vartheta_a = 8^\circ$ обеспечивает наибольшее абсолютное разрежение в донной области и, соответственно, наибольшую нерасчетность струи. Поскольку на автомодельном режиме струя натекает на стенку канала под строго определенным углом, то, чем больше отношение диаметра канала к диаметру критического сечения сопла, тем большим должен быть угол

раскрытия струи и ее нерасчетность. Имеет место линейная зависимость $n=n(F_{mp}/F^*)$ при постоянной длине канала и геометрии сопла (рис.13).

Таблица 1. $D_{mp}=85$ мм, $d^*=10,6$ мм.

Ma	1	2					3				4				
$\vartheta_{\dot{a}}, ^\circ$	0	0	8	15	30	40	8	15	30	40	0	8	15	30	40
P_0^{IV}	69	62	56,8	62	64	66	54,5	56	62	66	53	53	52	57	62,5
$P_{\dot{a}}^{IV}$	0,164	0,12	0,07	0,1	0,135	0,15	0,035	0,04	0,09	0,125	-	-	-	0,057	0,104
L_{onm}	1,8	3,3	2	2,95	2,9	2,5	5,65	4,95	3,05	3,05	-	7,34	6,34	6,43	4,62

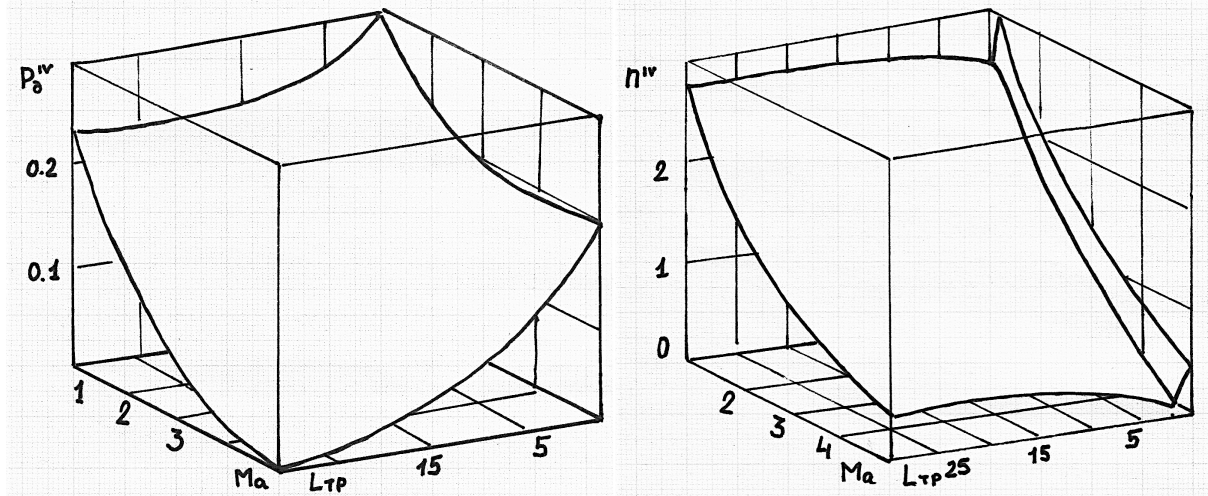


Рис.11. Минимальное донное давление и предельная нерасчетность.

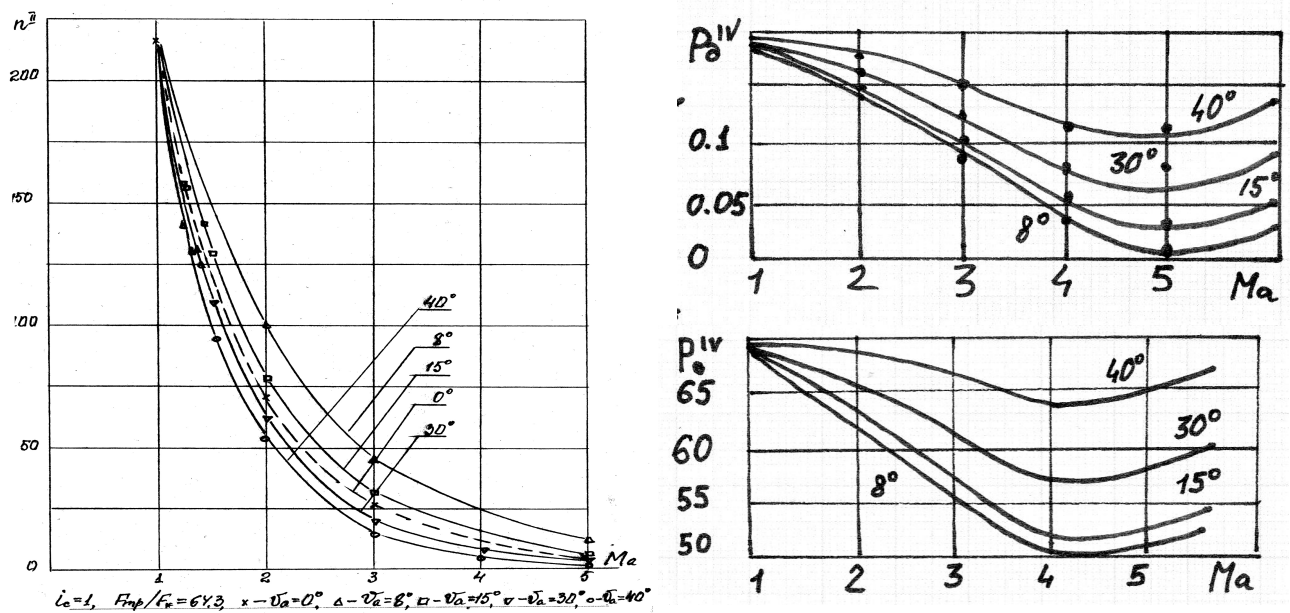


Рис. 12. Зависимость характерных давлений от геометрии сопла.

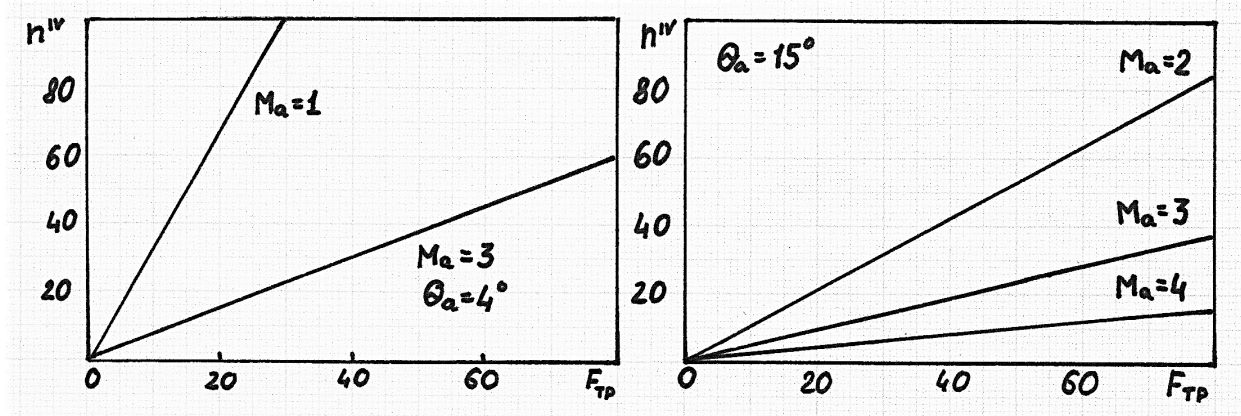


Рис.13. Зависимость предельной нерасчетности от площади канала.

Рассмотренные выше экспериментальные данные позволяют рекомендовать устройство «идеального эжектора». Такое устройство позволяет получить наибольшее разрежение при относительной простоте запуска и безотрывном течении в канале. Оно должно иметь подвижный относительно сопла конический расширяющийся канал. Запуск эжектора производится при максимальной длине канала, т.к. полное давление запуска при этом небольшое. Постепенно уменьшая длину канала (или выдвигая сопло внутрь эжектора), мы обеспечиваем одновременное увеличение относительной площади трубы, пока не достигается предельная нерасчетность струи.

Эффект глушения шума в канале, использующийся в разнообразных технических устройствах, возникает при P_0^{IV}, n^{IV} , когда все сечение канала перекрыто криволинейным скачком (Рис.9в). За скачком 4 течение дозвуковое, что вызывает значительное уменьшение акустического излучения по сравнению со свободной сверхзвуковой струей. В узком диапазоне параметров возможно существование сверхзвукового потока за точкой пересечения висячего скачка 1 с криволинейным скачком 4, но быстро тормозится за счёт сил вязкости.

Внутри диапазона $P_0^{II} - P_0^{III}$ струя совершает в канале сложные циклические колебания, сопровождающиеся мощным акустическим излучением в окружающее пространство. При определенном сочетании геометрических параметров установки колебания могут отсутствовать.

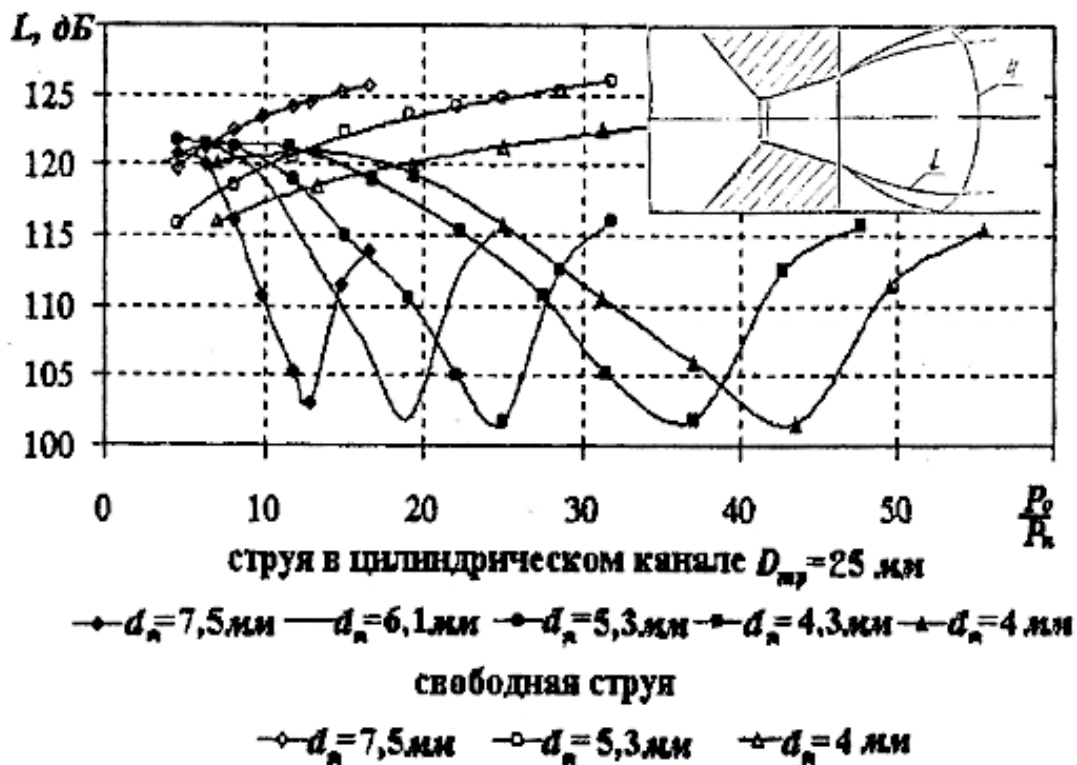


Рис. 14. Интегральный уровень шума струи в канале и затопленной струи.

5. Классификация режимов течения в канале

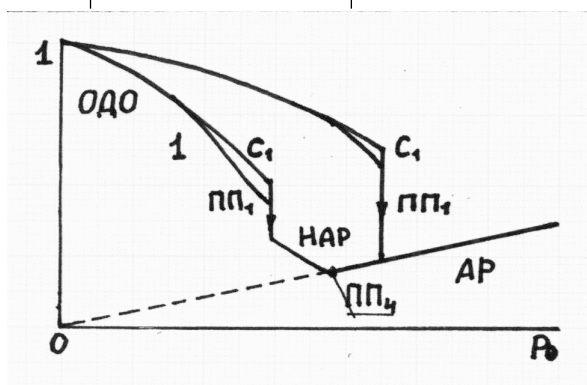
До сих пор в литературе не появилось исчерпывающей классификации режимов течения в канале с внезапным расширением. На рис.15 на графике $P_\partial(P_0)$ при различных длинах канала и в таблице 2 приведены все выявленные в настоящее время режимы течения в канале с внезапным расширением. В основу их классификации положены следующие классификационные признаки:

1) Автомодельность; 2) Тип донной области (ЗДО или ОДО), 3) Характер зависимости $P_\partial(t)$ при $P_0 = \text{const}$.

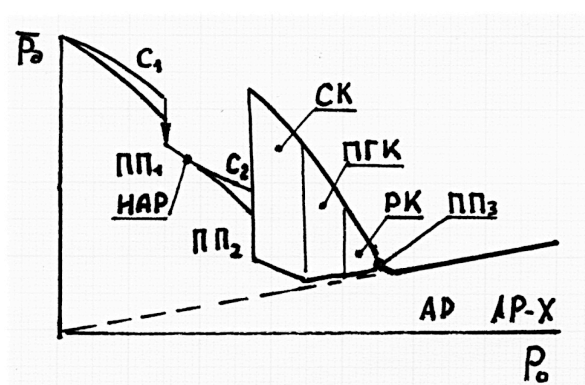
Различают автомодельные (АР) и неавтомодельные (НАР) режимы. АР соответствует восходящей ветви графика $P_\partial(P_0)$ (рис.15), струя натекает на стенку канала в пределах газодинамического участка первой бочки (рис.9,10, д,е), течение у стенок за пределом пограничного слоя всюду сверхзвуковое, донное давление не зависит от параметров окружающей среды (F_n) и длины канала. АР относится к стационарным режимам (см. таблица 2).

Таблица 2. Классификация режимов течения в канале

	Донная область	Стационарные	Нестационарные		
			Переходные	Колебательные	
	Открытая	ОДО			Стохастические
					C_1
	Закрытая	НАР	ПП ₁	СК	C_2
			ПП ₂		
ПП ₃			ПГК		
ПП ₄			РК		
АР		АР			
		АР-Х			



а) короткие и средние каналы



б) длинные каналы

Рис. 15. Режимы течения в канале с внезапным расширением.

Иногда выделяют автомодельный режим с сетчатой структурой скачков (АР-Х), в котором областями дозвукового течения можно пренебречь не только у стенок канала, но и по всей площади поперечного сечения (рис.9,10,е). Неавтомодельные режимы объединяет, то что донное давление зависит от P_0 , $L_{тр}$ и F_n . По второму признаку классификации НАР делятся на режимы с ОДО и ЗДО.

По характеру зависимости P_0 от времени при постоянном P_0 различают стационарные режимы, когда при заданном P_0 донное давление практически остается постоянным, и **нестационарные**. Стационарные режимы бывают автомодельными (АР, АР-Х) и неавтомодельными (ОДО, НАР). Нестационарные режимы бывают **переходными и колебательными**.

Переходные режимы (ПП) отличаются от других тем, что при постоянном полном давлении параметры в донной области изменяются в течение конечного промежутка времени, стремясь к стационарному состоянию или предельному циклу. Различают режимы ПП₁, который отвечает за переход от режима ОДО к НАР, ПП₄, соединяющий НАР и АР, а также ПП₂ и ПП₃, соответствующие началу и окончанию низкочастотных колебаний (см. таблица 2). Переходные режимы всегда неавтономные, т.е. их параметры зависят от длины канала и состояния окружающей среды.

Колебательные режимы делятся на **режимы стохастических (с₁ и с₂) и низкочастотных (НК)** колебаний (СК, ПГК, РК на рис. 15б). Все колебательные режимы также неавтономные. Стохастические колебания сопровождаются «хаотическим» изменением амплитуды параметров в донной области с высокой частотой. Режим с₁ возникает в течениях с ОДО, когда возвратный поток из окружающей среды в донную область становится трансзвуковым (рис.10а). Низкочастотным колебаниям всегда предшествует более или менее выраженный режим стохастических колебаний с ЗДО с₂.

Низкочастотные колебания отличаются большой амплитудой изменения параметров в донной области (F_{∂}) и частой на порядок меньшей, чем у стохастических колебаний. По характерному виду колебательного цикла различают колебания трех видов.

Первый тип колебаний – псевдогармонический (ПГК), как у осциллятора Ван-Дер-Поля. Колебания происходят между двумя крайними положениями, соответствующими натеканию струи турбулентным участком и первой бочкой. Донная область – закрытая.

Второй тип – составные колебания (СК), когда колебательный цикл, составлен из двух полуциклов: часть колебательного цикла происходит при ОДО, а другая при ЗДО. СК в длинных каналах могут отсутствовать. Если СК возникают, то с повышением P_0 , за ними всегда следуют ПГК.

Релаксационные колебания (РК) расположены не симметрично (смещены вверх) относительно осредненной (построенной без учета колебаний) кривой графика $P_\partial(P_0)$. Колебательный цикл РК имеет характерную пилообразную форму. РК завершают колебательный цикл. В струях, истекающих из сопел с $Ma < 2.5$ РК не возникают.

По длине канала различают длинные, средние и короткие каналы. Как видно, на рис.8,15 характер зависимости $P_\partial(P_0)$ существенно зависит от длины канала. Если по мере повышения P_0 при переходе от ОДО к ЗДО струя касается стенок канала сразу первой бочкой, то такой **канал называется коротким**. В этот момент происходит интенсивное опорожнение донной области, сопровождающееся скачкообразным уменьшением P_∂ . Газодинамическая система переключается сразу на АР (верхний график на рис. 15а).

Если же струя при переходе от ОДО к ЗДО касается стенок канала турбулентным участком и длина первой бочки существенно меньше длины трубы, то такой **канал называется длинным**. В длинных каналах при $Ma > 1.5$ и $\theta_a \leq 30^\circ$ присутствуют все режимы течения (рис. 15б), в том числе, автоколебательные. Для различных сопел существует узкий диапазон длин канала, таких, что переключение с режима ОДО происходит сразу на участок НАР, непосредственно предшествующий АР, т.е. низкочастотные колебания не возникают (ветвь 1 на рис. 15а). Такие **каналы называются средними**. Если рассмотреть предельные случаи, то при $L_{mp} \rightarrow 0$ получается обычная затопленная сверхзвуковая струя, а при $L_{mp} \rightarrow \infty$ струя, истекающая из сопла взаимодействует со стенками канала при любых значениях P_0 , т.е. режим ОДО отсутствует.

6. Переходные процессы

Развитые методы, основанные на квазистационарной постановке задачи в форме анализа дисбаланса ζ , позволяют верно предсказывать не только последовательность смены основных режимов по мере повышения полного давления P_0 перед соплом, но и наличие релаксационных переходных

процессов ПП₁ на границе режимов. При любом P_0 можно построить ветви зависимости $\zeta(P_\delta)$, соответствующие АР, НАР и ОДО.

Переходный процесс ПП₁ происходит в момент, когда перепад давления между донной областью и окружающей средой становится сверхкритическим, q_v не может расти за счет увеличения скорости потока в возвратном течении. Дисбаланс ζ положительный, струя эжектирует газ, опорожняя донный объем при $P_0 = const$. P_δ быстро уменьшается (Рис. 16а). Этот процесс часто называется релаксационным. Следует отметить, что в длинных и средних каналах скачок P_δ , сопровождающий переход ПП₁ от ОДО к НАР с ЗДО может происходить, как в сторону уменьшения P_δ , так и в сторону его увеличения. Второй случай ранее не был описан в литературе.

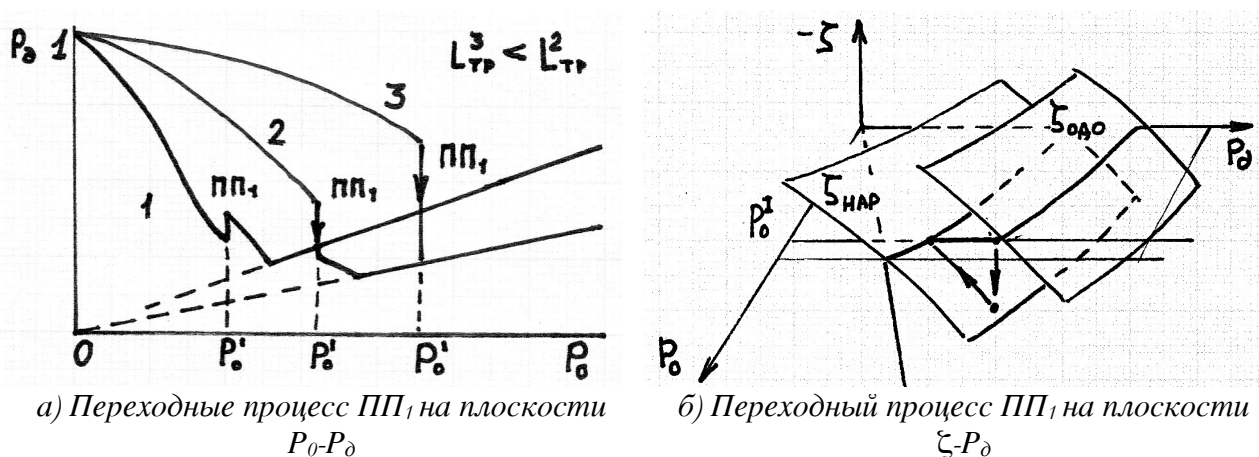


Рис. 16. Переходный процесс ПП₁ между ОДО и НАР.

Увеличение P_δ в результате ПП₁ характерно для струй, истекающих в канал из сопла с углом его полураствора $\theta_a = 30-40^\circ$. Такие струи при нерасчетностях, соответствующих ПП₁, имеют большие поперечные размеры первой бочки и диска Маха. Высокая эжекционная способность струи при узком кольцевом зазоре между границей и стенкой канала приводит к тому, что с ростом полного давления P_δ падает заметно быстрее (Рис. 16а, кривая 1), чем при небольших углах полураствора сопла (Рис. 16а, кривая 2). На неавтомодельном же режиме ЗДО стационарное положение достигается при строго определенном угле натекания на стенку и числе Маха на теоретической границе струи, которые зависят от θ_a , P_δ . Чем больше θ_a , тем меньше

нерасчетность струи, необходимая для этого и, соответственно, тем больше P_0 , соответствующее стационарному положению. Существует такое сочетание L_{mp} , M_a и θ_a , что после ПП₁ скачок давления отсутствует вовсе. Сам же процесс, сопровождающийся перестройкой ударно-волновой структуры, присутствует всегда.

При увеличении P_0 режим ПП₁ наступает тем позже, чем короче канал. В коротких каналах ПП₁ переключает систему сразу на автомодельный режим (Рис. 16а, кривая 3), при этом P_0 всегда уменьшается независимо от θ_a .

Переходный процесс ПП₄ (рис.17). По мере приближения к точке P_0^{IV} габариты первой бочки струи растут, и диаметр максимального поперечного сечения струи приближается к диаметру канала. На ветвь «а» изменение P_0 и P_n не влияет. С увеличением P_0 из-за влияния P_n ветвь «б» графика $\zeta(P_0)$, соответствующая натеканию струи на стенку в пределах турбулентного участка, смещается постепенно вверх - вправо, пока устойчивый левый корень не исчезает (Рис.17б),

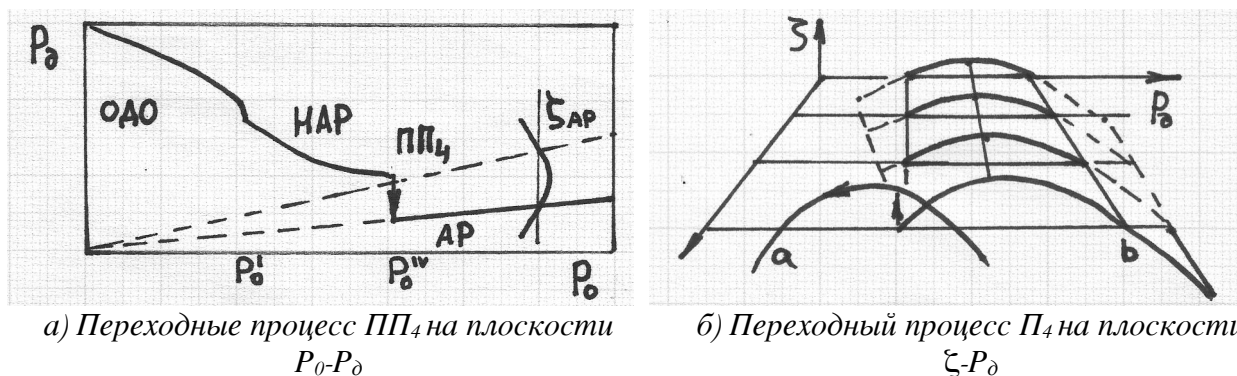


Рис.17. Переходный процесс ПП₄ между НАР и АР.

В этот момент струя, натекающая на стенку канала турбулентным участком, теряет способность находиться в стационарном состоянии. Поскольку дисбаланс $\zeta > 0$, но невелик по абсолютной величине, то струя эжектирует газ из донной области и P_0 медленно уменьшается при постоянном P_0 . Так происходит до тех пор, пока струя не коснется стенки канала первой бочкой. При этом происходит перестройка течения, давление в донной области становится примерно постоянным по всему объему. В этот момент система оказывается в

состоянии, соответствующем участку между устойчивым и неустойчивым корнем ветви «а» графика $\zeta(P_0)$ режима АР (рис.16б). Дисбаланс положителен, струя продолжает эжектировать газ из донной области, что приводит к дальнейшему уменьшению P_0 , пока не будет достигнуто стационарное положение, соответствующее АР. Процесс ПП₄ существует всегда, хотя при $M_a > 3$ он менее выражен и скачок донного давления при окончании НАР почти незаметен.

Возникновение (ПП₂) и затухание (ПП₃) низкочастотных колебаний.

В канале наблюдаются хаотические колебания, называвшиеся в ранних исследованиях случайными (c_1 и c_2). По мере увеличения P_0 их амплитуда растет, что ранее объяснялось усилением возмущений с приближением средней скорости в возвратном потоке к местной скорости звука. Однако для режима c_2 такое объяснение не проходит, т.к. расчет показывает, что местное возвратное течение в данном случае существенно дозвуковое. Естественно возникает вопрос – действительно ли колебания c_1 и c_2 носят случайный характер и подобны «белому шуму». Для проверки этой гипотезы были произведены вычисления автокорреляционной функции по временной последовательности в интервале, при котором P_0 можно было считать постоянным. Если колебания случайные, то эта функция должна была быть примерно постоянной и близкой к нулю. Результаты расчетов опровергли данную гипотезу, функция менялась в широких пределах $[0,1]$, следовательно, режиму НК предшествует детерминированный хаос, из которого образуется переходный колебательный процесс ПП₂ с увеличивающейся амплитудой, непосредственно предшествующий началу низкочастотных колебаний (рис. 18). Ранее подобные переходные процессы были получены расчетным путем для случая натекания струи на перпендикулярную преграду [11-12]. Окончание колебательного цикла по мере увеличения P_0 всегда происходит с уменьшением амплитуды колебаний P_0 до нуля. Возникает вопрос, что произойдет, если зафиксировать P_0 вблизи точки окончания колебательного цикла.

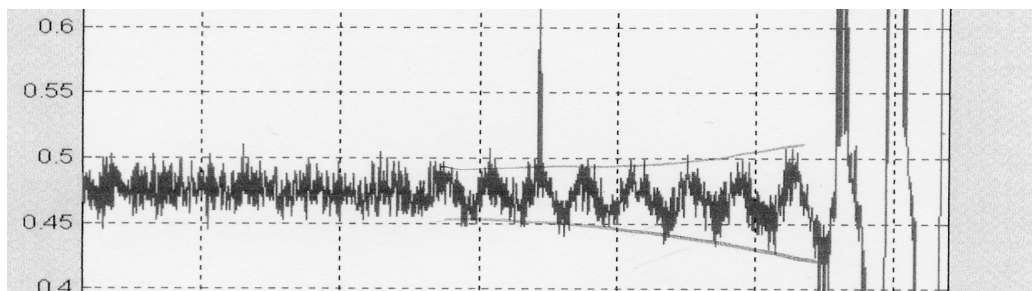


Рис. 18. Стохастические колебания c_2 и переходный процесс ПП₂.

Произойдет ли с течением времени уменьшение амплитуды колебаний до нуля или она будет оставаться постоянной. Иными словами имеет ли место переходный процесс, зависящий только от времени t . На этот вопрос нельзя ответить, оставаясь в рамках квазистационарной постановки задачи.

Проведенная серия экспериментов, в которой P_0 изменялось медленно, показала, что такой переходный процесс ПП₃ (рис. 19) существует.

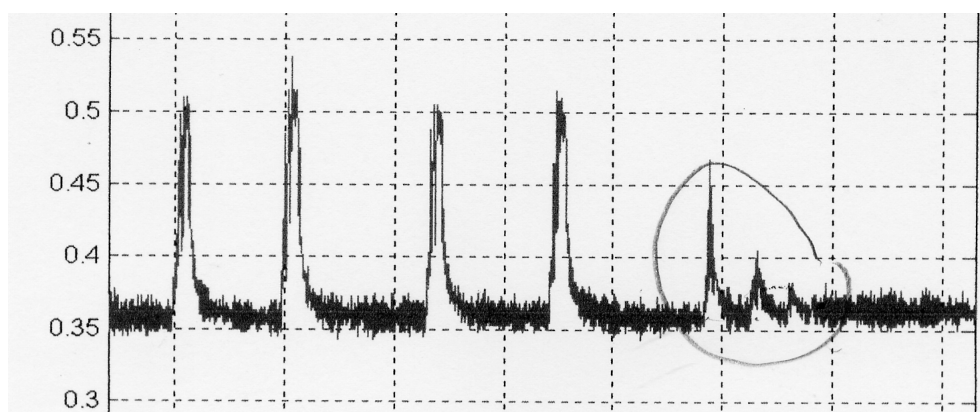


Рис. 19. Субгармонический каскад, переходный процесс ПП₃.

Его длительность составляет, как правило, пять периодов T низкочастотных колебаний. На этом отрезке обычно присутствует три пары всплесков P_∂ , меньшей амплитуды установившихся колебаний. Расстояние между соответствующими пиками равно $2T$. Затем амплитуда колебаний падает за время T до величины хаотических пульсаций P_∂ , причем величина каждой последующей пульсации меньше предыдущей примерно в 2,5 раза. Все это очень напоминает субгармонический каскад, когда колебания становятся сначала квазипериодическими с двумя частотами f_1 и f_2 , причем f_1/f_2 -иррациональное число, а затем переходят к хаотическим пульсациям с

появлением все новых гармоник и уменьшением пульсаций пропорционально универсальной константе подобия $\alpha=2.5029078\dots$ [15].

7. Низкочастотные колебания

Рассмотрим теперь подробнее наиболее сложное явление, возникающее в канале с внезапным расширением потока - **низкочастотные колебания**. Они сопровождаются мощным акустическим излучением, что широко используется в различных технологических установках в области металлургии и упрочнения изделий из металлов. Нестационарные явления, сопровождающие истечение сверхзвуковой струи в канал с герметизированной донной областью, изучались в течение длительного времени [13], как экспериментально, так и с помощью разработанных математических моделей [14]. Невыясненным остается вопрос о том, каков механизм поддержания низкочастотных колебаний.

Ранее выдвигались разнообразные гипотезы о природе колебаний и причинах их возникновения. Систематические исследования, проведенные в БГТУ «Военмех» в 80-е и 90-е годы, опровергли большинство из них. Выяснилось, что струя в канале не совершает азимутальных и крутильных колебаний. Не существует также боковых колебаний, подобных тем, что наблюдаются в плоском случае, когда поток прилипает то к одной, то к другой стенке. Не подтвердилась и акустическая теория, утверждающая, что за возникновение и поддержание колебаний отвечают волны сжатия, распространяющиеся в донную область из области натекания границы струи на стенку и вызывающие, по мнению ряда исследователей, возмущение потока у кромки сопла. Эксперименты показали, что низкочастотные колебания имеют частоту на порядок меньшую, чем предсказывает акустическая теория, а сами они могут возникать и в случае натекания на преграду струи, находящейся в сверхзвуковом спутном потоке, когда акустическая обратная связь отсутствует, по определению.

7.1. Основные экспериментальные сведения о НК

В процессе колебаний течение остается строго осесимметричным, пространственные эффекты не имеют существенного значения. В каналах с соплами с $Ma \leq 1.5$ низкочастотные колебания не возникают.

Колебания носят квазистационарный характер, т.е. газодинамические функции F_δ не зависят явным образом от времени, а определяются только донным давлением, которое, в свою очередь, зависит от расхода газа, ежектируемого из донной области и втекающего в нее. Если взять P_δ и P_0 , соответствующие какой-либо точке колебательного цикла, рассчитать по этим данным геометрию ударно – волновой структуры струи, как в стационарном случае, и сравнить ее с фотографиями, то совпадение будет хорошим.

Колебания при увеличении P_0 всегда возникают с отличной от нуля амплитудой, причем первый цикл начинается с уменьшения P_δ . Амплитуда колебаний P_δ растет $\sim t^{1/2}$, что дает основание говорить о существовании субкритической бифуркации Хопфа от стационарного положения к предельному циклу, что полностью соответствует квазистационарной модели колебательного цикла с двумя стационарными положениями, устойчивым и неустойчивым.

Ширина диапазона колебательного режима ($P_0^{II} - P_0^{III}$) зависит от Ma и угла полураствора сопла θ_a . У сопел с $Ma = 2$ диапазон колебательного режима значительно уже, чем у сопел с $Ma \geq 3$, когда колебания продолжаются практически до момента достижения минимального донного давления (Рис. 20). Общая тенденция такова, что при $L_{mp} > L_{onm}$ диапазон колебаний расширяется с увеличением длины канала вплоть до $L_{mp} = 10$, затем плавно уменьшается, стремясь к своему асимптотическому значению.

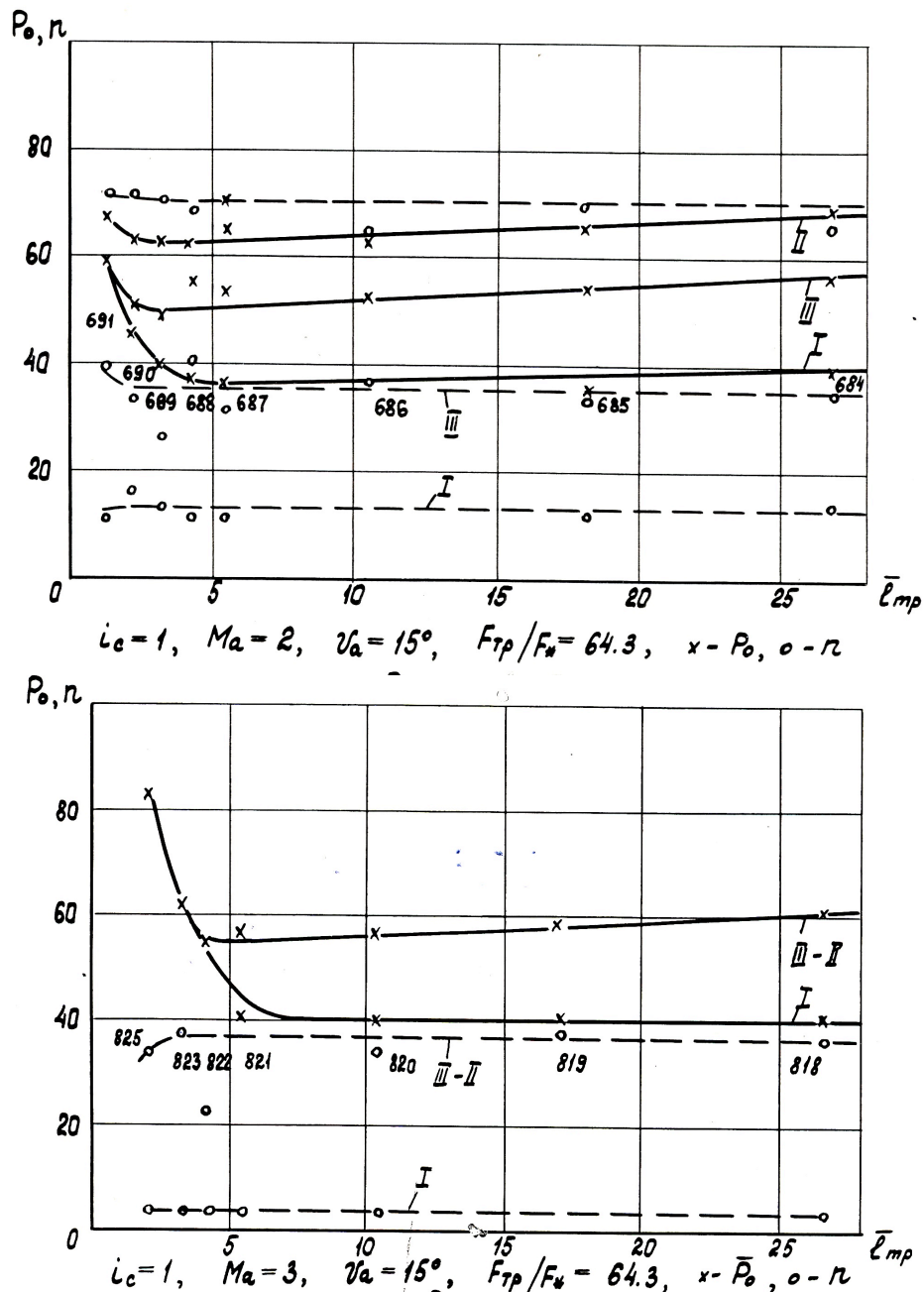


Рис.20. Диапазон n и P_0 , соответствующий колебательному режиму.

Механизм возбуждения и поддержания колебаний – расходный. Другие факторы не имеют принципиального значения. В канале с соплом $Ma=1$ колебания в обычных условиях не возникают. В одном эксперименте для возбуждения колебаний донный объем был соединен полостью с областью натекания струи на стенку канала, так что в него могло поступать дополнительное количество газа, что приводило к возбуждению колебаний.

Колебания удобно анализировать на плоскости ζ - P_0 . На рис. 21 видно, что этот график состоит из двух ветвей. Одна ветвь «b», соответствует взаимодействию струи со стенками турбулентным участком. Другая ветвь «a» отвечает за взаимодействие в пределах первой бочки. Из-за влияния наружного давления для каждого P_0 ветвь «b» будет своя. Ветвь «a» остается неизменной. Имеется область значений P_0 , при которой существует неоднозначность (рис. 21a), т.е. газодинамическая система может находиться в двух различных состояниях. Видно, что внутри данной области ни на одной ветви устойчивое положение не достигается. Это, собственно, и является механизмом поддержания колебательного режима, в ходе которого происходит переключение с одной ветви на другую (см. стрелки на рис.21a). Для струй с $Ma=1$ ветвь «a» имеет только один корень (рис. 21б), т.е. в момент касания стенки канала первой бочкой дисбаланс положительный и небольшой по величине. Газодинамическая система плавно перемещается к устойчивому положению, соответствующему AP, колебания не возникают. Таким образом, *признаком отсутствия колебательного режима является наличие только одного корня $\zeta(P_0)=0$ у ветви «a» графика, соответствующей натеканию струи на стенку в пределах первой бочки.*

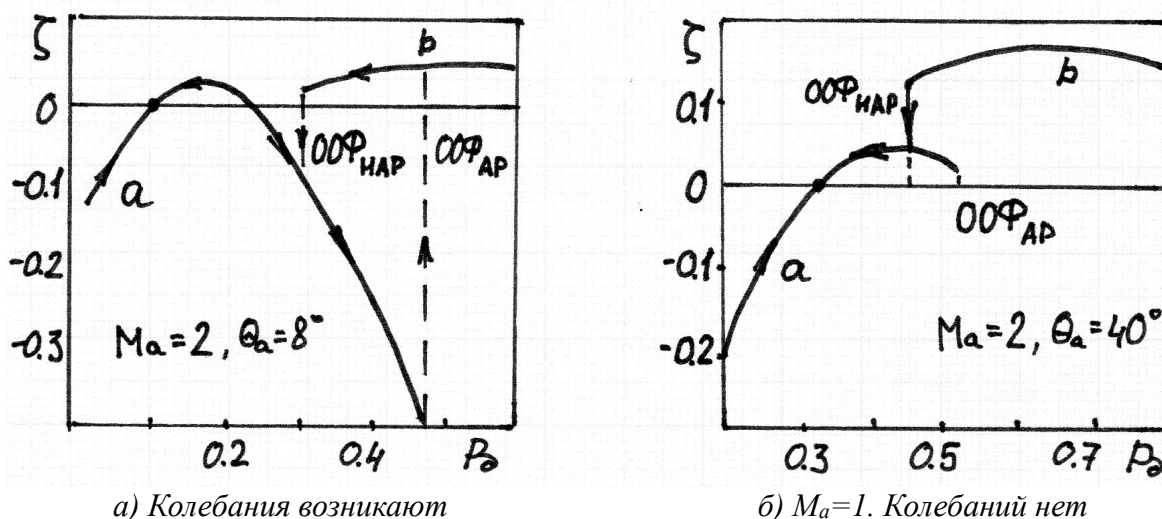


Рис. 21. Колебания на плоскости ζ - P_0 .

7.2 Физическая картина колебаний

Колебательный цикл характеризуется периодическим изменением не только донного давления, но и всей газодинамической структуры течения (см. кинограмму цикла СК на рис.22).

На рис.23а приведены зависимость частоты колебательного процесса от длины канала и числа Маха на срезе сопла, имеющая разрыв в районе $L_{mp}=L_{onm}$ (см. рис.23а), а также схемы течения и форма колебательного цикла для основных режимов колебаний. На участке 1-2 (рис.23б) колебательного цикла псевдогармонических колебаний струя взаимодействует со стенками турбулентным участком. Дисбаланс положителен, происходит опорожнение донной области. С ростом нерасчетности струи присоединенная масса растет и уменьшается донный объем.



Рис.22. Кинограмма колебательного цикла на режиме составных колебаний.

С другой стороны, с перемещением точки натекания струи на стенку, уменьшается площадь поверхности струи, что должно приводить к уменьшению q_p . Эти два фактора влияют на вторая производную зависимость $P_d(t)$, которая в точке 2 обращается в нуль.

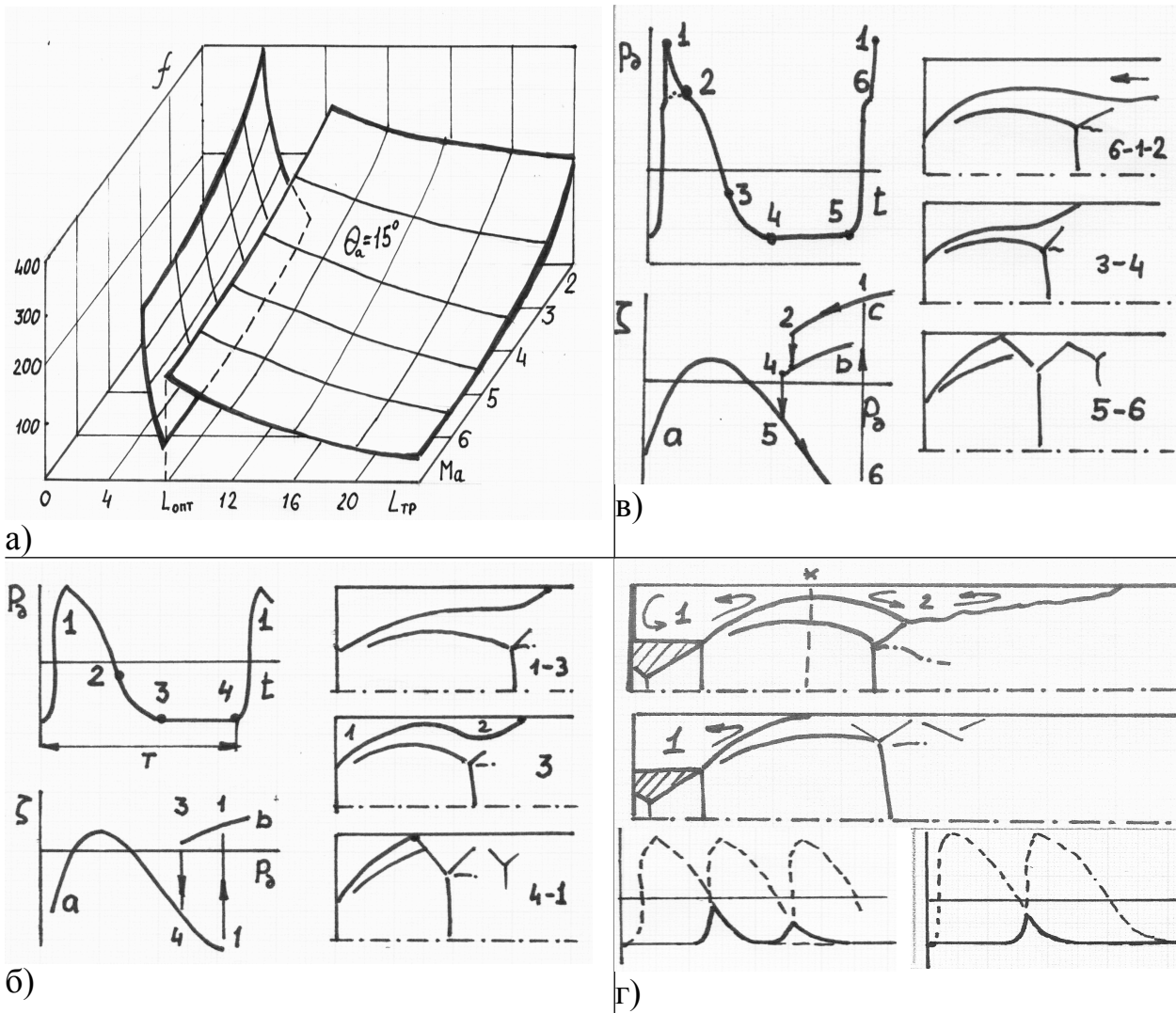


Рис. 23. Колебательные режимы. а) зависимость частоты колебаний от L_{tr} , Ma . б) псевдогармонические колебания. в) составные колебания. г) релаксационные колебания.

В точке 3 максимальный диаметр первой бочки струи почти равен диаметру канала. Образуется две застойные зоны: одна между донным срезом и сечением максимального диаметра первой бочки (1), вторая (2) между этим сечением и точкой натекания турбулентного участка на стенку канала (рис.23б). Дисбаланс положительный и небольшой по величине. Между точками 3 и 4 колебательного цикла происходит перестройка течения, таким образом, что вторая застойная зона исчезает, а струя начинает взаимодействовать со стенкой газодинамическим участком. P_∂ при этом меняется слабо. Оно существенно выше значений, соответствующих стационарному течению на AP при данном P_0 . На графике $\zeta(P_\partial)$ в точке 4 система переключается на ветвь «а», соответствующую натеканию на стенку в пределах первой бочки.

Поскольку $\zeta \ll 0$, то происходит интенсивная запитка донной области, сопровождающаяся резким ростом P_d и удалением точки натекания от среза сопла. Так происходит до тех пор, пока первая бочка не отлипнет от стенок. Точка натекания на стенку перемещается скачком на турбулентный участок (точка 1). Далее цикл повторяется.

В случае составных колебаний (Рис.23в) струя в начале цикла эжектирует газ из открытой донной области. Расход эжектируемого газа, существенно превышает расход газа, затекающего в донную область из окружающей среды по кольцевому зазору между струей и стенками канала. Нерасчетность струи растет, ее габариты и эжекционная способность увеличиваются, а площадь кольцевого зазора, q_v и донное давление падает (ветвь «с» на рис.23в), пока струя не начнет взаимодействовать с каналом турбулентным участком (точка 2 на рис. 23в). Далее все происходит как в ПГК. Отличие в том, что интенсивная запитка донной области при взаимодействии с каналом газодинамическим участком сопровождается столь резким ростом P_d , что происходит открытие донной области. Таким образом, колебательный цикл состоит из двух частей, поэтому колебания называются составными.

В струях с $Ma > 3$ за ПГК следуют релаксационные колебания, имеющие характерную пилообразную форму цикла (рис. 23г). При больших числах Ma струи имеют длинную первую бочку, а линии тока небольшую кривизну. В результате в момент касания первой бочкой стенок канала вторая застойная зона («2» на рис. 23.г) оказывается существенно длиннее, чем у струй с меньшим Ma , а ее объем сопоставим с объемом донной области. Колебания происходят в небольшом диапазоне изменения P_d и заключаются в возникновении и исчезновении второй застойной зоны.

7.3 Тонкая структура колебательных режимов

Модель автоколебаний с периодическим источником энергии в виде дисбаланса масс ζ , эжектируемых из донной области и поступающих в нее, позволила предсказать форму колебательного цикла, характерную для

осциллятора Ван-Дер-Поля, а в конце колебательного режима – пилообразную, типичную для релаксационных колебаний с ограничениями.

Развитая теория является верной, но, неполной. На участке 3-4 колебательного цикла присутствуют стохастические колебания. Вычисление автоковариационной функции показало, что их нельзя отнести к «белому шуму», т.е. этот феномен не поддается объяснению в рамках квазистационарной постановки задачи.

В нестационарном случае для последовательности $P_\partial(t)$ можно ввести отображение первого порядка на себя типа $P_\partial \rightarrow \lambda \xi P_\partial (1 - P_\partial) \equiv F(P_\partial)$, которое приводит к **логистическим** последовательностям вида $D_n = \lambda \xi D_{n-1} (1 - D_{n-1})$. Для квадратичных функций F поведение таких последовательностей хорошо изучено в самых разных отраслях науки: от химии до экономики. Дисбаланс ξ , как раз, и представляет собой квадратичную функцию от P_∂ и мы можем воспользоваться результатами теории.

Поведение функции $P_\partial(t)$ существенно зависит от коэффициента $\lambda = \lambda(P_\partial)$. При некоторых критических значениях λ , происходит качественное изменение состояния газодинамической системы (катастрофа). Этим моментами в развитой нами теории соответствуют ПП. Вне точек катастроф система совершает хаотические флуктуации в окрестности аттрактора (стационарного положения или предельного цикла). С методической точки зрения переход от квазистационарного к детерминистскому подходу означает переход от осредненных параметров течения к мгновенным, что позволяет в процессе итерационных расчетов улавливать тонкую структуру колебательных режимов, фоновые хаотические колебания, наложенные на основной низкочастотный цикл, перемежаемость первого и второго рода [15], переходные процессы в виде прямого и обратного субгармонических каскадов. Квазистационарная постановка задачи делать этого не позволяет.

8. Гистерезисные явления

Выше была подробно описана последовательность смены режимов по мере повышения полного давления в ресивере. Изменится ли зависимость P_∂ (P_0) на обратном ходе? Оказывается, да, существует гистерезис.

Переход от АР к НАР. Если на автоматическом режиме уменьшать полное давление P_0 , то P_∂ также уменьшится таким образом, что геометрия границы струи не изменится. В то же время центральный скачок 3 (рис. 9д) перемещается вверх по потоку до тех пор, пока тройная точка A не совпадет с точкой B пересечения висячего скачка 1 и пристенного скачка. В этот момент происходит распад ударно-волновой структуры в результате нарушения условий динамической совместности на газодинамических разрывах, и граница струи отлипает от стенки. Происходит переключение с АР на режим ОДО (ПП₁ для коротких каналов) или НАР (ПП₄ для средних и длинных каналов). Эксперименты показывают, что на обратном ходе P_0^{IV} всегда меньше, чем на прямом, соответственно, существует гистерезис (рис.24а), т.к. за переключение с режима на режим отвечают процессы различной физической природы.

Влияние скорости «сброса» P_0 . В каналах умеренной длины при уменьшении полного давления в высоком темпе график $P_\partial(P_0)$ на участке НАР располагается выше, чем на прямом ходе (рис.24б). Дело в том, что при быстром сбросе P_0 процессы уже не могут считаться квазистационарными, а функция $\zeta(P_\partial, t)$ при данном P_0 имеет три корня, причем два крайних – неустойчивые, а средний устойчивый. Напомним, что в квазистационарном случае у $\zeta(P_\partial)$ два корня, устойчивым является корень с меньшим P_∂ . Если скоростью изменения P_0 можно пренебречь, то система находится в положении, соответствующем меньшему значению P_∂ , если нет, то этот корень неустойчивый, а P_∂ будет соответствовать среднему корню, большему по величине. Так продолжается вплоть до начала НК.

Гистерезис графика $P_0(P_0)$ в точке P_0'' . Эксперименты показали, что при увеличении полного давления колебательный режим НК начинается субкритической бифуркацией Хопфа, а заканчивается субгармоническим каскадом. В соответствии с теорией на обратном ходе гистерезис должен возникать в точке P_0'' , т.к. здесь предельный цикл неустойчив. Эксперименты подтверждают этот факт, имеет место «затягивание» колебаний (рис. 24в), т.е. при сбросе полного давления P_0'' меньше, чем при его увеличении.

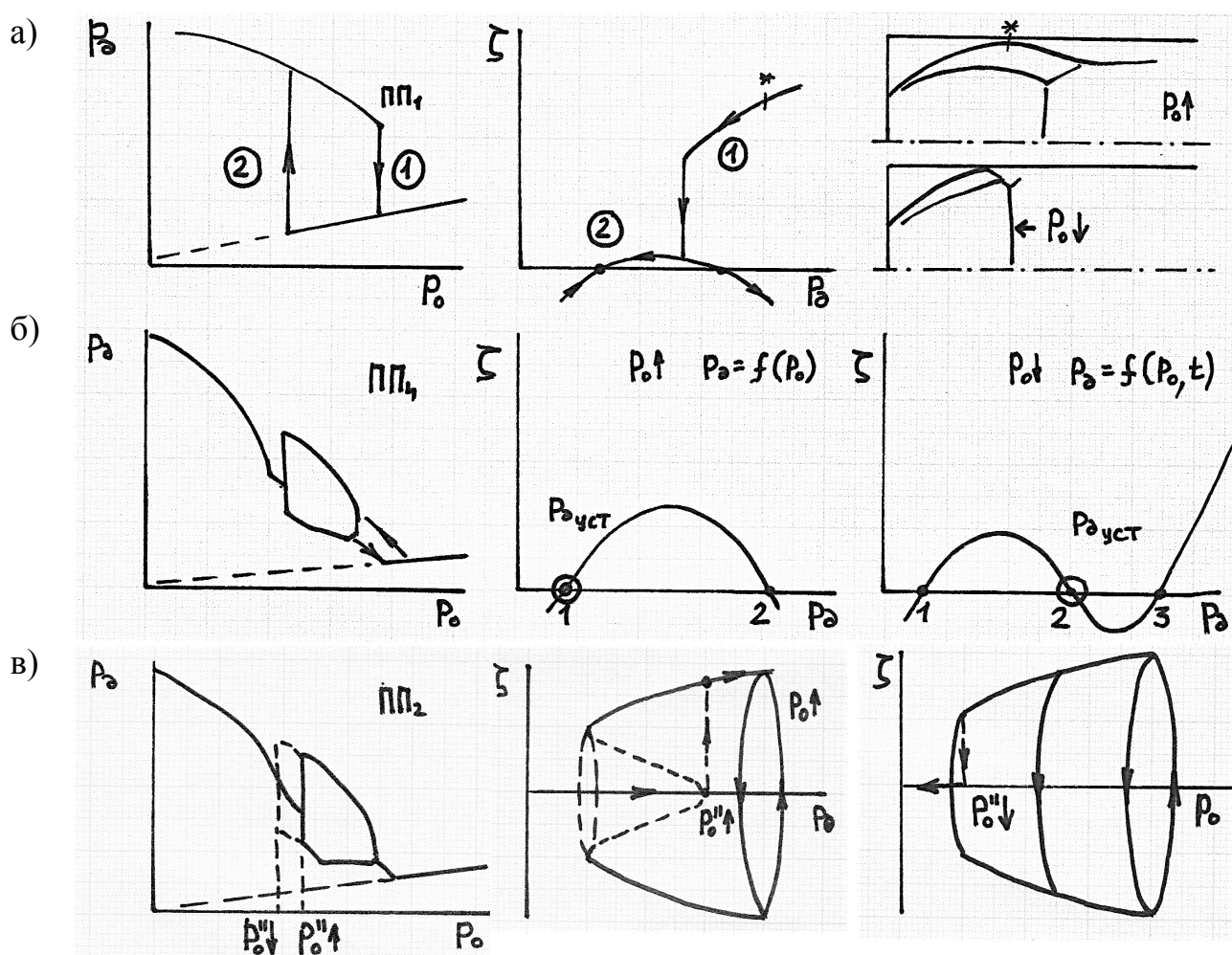


Рис.24. Переходные процессы и гистерезис.

9. Заключение

В статье приведены практически все известные на сегодняшний момент экспериментальные сведения о течениях с внезапным расширением для случая одиночных струй, полученные в БГТУ «Военмех» и другими исследователями.

Дана полная классификация режимов, описаны характеры зависимостей донного давления от геометрии установки и других параметров. Рассмотрены нестационарные процессы, показана их связь с дисбалансом расходов газа, втекающего в донную область и эжектируемого из нее. Основные результаты получены авторами, при изложении результатов других авторов, приведены ссылки на соответствующие публикации.

Литература

- 1.Л.В. Гогиш, Г.Ю. Степанов. Турбулентные отрывные течения. - М.: Наука, 1979. - 368 с.
- 2.Корст Г. Теория определения донного давления в околосзвуковом и сверхзвуковом потоках. – В сб. Мех,4аника. – М.: Иностранная литература, 1957, №5, с.49-63.
- 3.Чау, Эдди, Взаимодействие между основным и вторичным потоками сверхзвуковых и эжекторных систем и их рабочие характеристики. РТ и К, 1964, №4, с.91-104.
- 4.Баланин Б.А. Исследование влияния размера выходного отверстия на режим работы Эйфеля сверхзвуковой аэродинамической трубы. Вестник МГУ, №7, 1965.
- 5.Баланин Б.А. О распространении сверхзвуковой струи в ограниченном пространстве. Вестник МГУ, №7, 1965.
- 6.Баланин Б.А. Исследование изменения давления по длине и торцам камеры Эйфеля сверхзвуковой аэродинамической трубы. Вестник МГУ, №7, 1965.
- 7.Anderson J.S., Williams T.S. Base pressure and noise produced by the abrupt expansion of air in a cylindrical duct. J. Mech. Sci., 1968, vol.10, №3, pp.262-268.
- 8.Martin B.W., Baker P.J. Experiments on a supersonic parallel diffuser. J. Mech. Sci., 1963, vol., №5, pp.98-113.
- 9.Jungowski W.M. On the pressure oscillation in sudden enlargement of a duct section. Fluid dynamic. 1964, pp.735-741.

10. Глотов Г.Ф., Мороз Э.К. Исследование осесимметричных течений с внезапным расширением звукового потока. Труды ЦАГИ, вып. 1281., ЦАГИ, М.: 1970, 28 с.
11. Соколов Е.И. Перемещение центрального скачка в недорасширенной струе перед перпендикулярной преградой под воздействием малого нестационарного возмущения// Уч. Зап. ЛГУ Сер. «Газодинамика и теплообмен». – 1987. – Вып. 9. – С. 41 – 47.
12. Алексеев П.А., Альбазаров Б.Ш., Булат П.В., Горшков Г.Ф., Засухин О.Н., Савин А.В., Соколов Е.И., Усков В. Н., Фаврский В.С. Физические и математические модели нестационарных и гистерезисных явлений в струйных течениях газа. Отчет по НИР, БГТУ им. Устинова, 1993, 180 с.
13. Булат П.В., Засухин О.Н., Усков В.Н. Механизмы нестационарных процессов в канале с внезапным расширением. Тезисы докладов XV Всесоюзного семинара по газовым струям, 25-27 сент. 1990 г./ ЛМИ, 1990. – с. 21.
14. Булат П.В., Засухин О.Н., Усков В.Н. Комплексная методика расчета струи в канале с внезапным расширением при наличии переходных процессов на неавтомодельных режимах. Течения газа и плазмы в соплах, струях и следах: Тезисы докладов XVIII Международного семинара, 21-23 июня 2000 г., БГТУ, 2000 г. – с.48.
15. Libchaber A., Fauve S., Laroche C., Two – parameter study of the routes to chaos, Physica, 7D, 1983. - p73